

## Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.

Von **W. Heisenberg** in Kopenhagen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 23. März 1927.)

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst exakte Definitionen der Worte: Ort, Geschwindigkeit, Energie usw. (z. B. des Elektrons) aufgestellt, die auch in der Quantenmechanik Gültigkeit behalten, und es wird gezeigt, daß kanonisch konjugierte Größen simultan nur mit einer charakteristischen Ungenauigkeit bestimmt werden können (§ 1). Diese Ungenauigkeit ist der eigentliche Grund für das Auftreten statistischer Zusammenhänge in der Quantenmechanik. Ihre mathematische Formulierung gelingt mittels der Dirac-Jordanschen Theorie (§ 2). Von den so gewonnenen Grundsätzen ausgehend wird gezeigt, wie die makroskopischen Vorgänge aus der Quantenmechanik heraus verstanden werden können (§ 3). Zur Erläuterung der Theorie werden einige besondere Gedankenexperimente diskutiert (§ 4).

Eine physikalische Theorie glauben wir dann anschaulich zu verstehen, wenn wir uns in allen einfachen Fällen die experimentellen Konsequenzen dieser Theorie qualitativ denken können, und wenn wir gleichzeitig erkannt haben, daß die Anwendung der Theorie niemals innere Widersprüche enthält. Zum Beispiel glauben wir die Einsteinsche Vorstellung vom geschlossenen dreidimensionalen Raum anschaulich zu verstehen, weil für uns die experimentellen Konsequenzen dieser Vorstellung widerspruchsfrei denkbar sind. Freilich widersprechen diese Konsequenzen unseren gewohnten anschaulichen Raum-Zeitbegriffen. Wir können uns aber davon überzeugen, daß die Möglichkeit der Anwendung dieser gewohnten Raum-Zeitbegriffe auf sehr große Räume weder aus unseren Denkgesetzen noch aus der Erfahrung gefolgert werden kann. Die anschauliche Deutung der Quantenmechanik ist bisher noch voll innerer Widersprüche, die sich im Kampf der Meinungen um Diskontinuums- und Kontinuumstheorie, Korpuskeln und Wellen auswirken. Schon daraus möchte man schließen, daß eine Deutung der Quantenmechanik mit den gewohnten kinematischen und mechanischen Begriffen jedenfalls nicht möglich ist. Die Quantenmechanik war ja gerade aus dem Versuch entstanden, mit jenen gewohnten kinematischen Begriffen zu brechen und an ihre Stelle Beziehungen zwischen konkreten experimentell gegebenen Zahlen zu setzen. Da dies gelungen scheint, wird andererseits das mathematische Schema der Quantenmechanik auch keiner Revision bedürfen. Ebensowenig wird eine Revision der Raum-Zeitgeometrie für kleine Räume und Zeiten notwendig sein, da wir durch Wahl hinreichend schwerer Massen die quantenmechanischen Gesetze den

klassischen beliebig annähern können, auch wenn es sich um noch so kleine Räume und Zeiten handelt. Aber daß eine Revision der kinematischen und mechanischen Begriffe notwendig ist, scheint aus den Grundgleichungen der Quantenmechanik unmittelbar zu folgen. Wenn eine bestimmte Masse  $m$  gegeben ist, hat es in unserer gewohnten Anschauung einen einfach verständlichen Sinn, vom Ort und der Geschwindigkeit des Schwerpunkts dieser Masse  $m$  zu sprechen. In der Quantenmechanik aber soll eine Relation  $p q - q p = \frac{h}{2\pi i}$  zwischen Masse, Ort und Geschwindigkeit bestehen. Wir haben also guten Grund, gegen die kritiklose Anwendung jener Worte „Ort“ und „Geschwindigkeit“ Verdacht zu schöpfen. Wenn man zugibt, daß für Vorgänge in sehr kleinen Räumen und Zeiten Diskontinuitäten irgendwie typisch sind, so ist ein Versagen eben der Begriffe „Ort“ und „Geschwindigkeit“ sogar unmittelbar

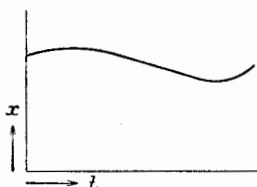


Fig. 1.

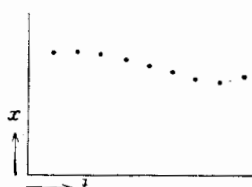


Fig. 2.

plausibel: Denkt man z. B. an die eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes, so wird man in einer Kontinuumstheorie eine Bahnkurve  $x(t)$  für die Bahn des Teilchens (genauer: dessen Schwerpunktes) zeichnen können (Fig. 1), die Tangente gibt jeweils die Geschwindigkeit. In einer Diskontinuumstheorie dagegen wird etwa an Stelle dieser Kurve eine Reihe von Punkten endlichen Abstandes treten (Fig. 2). In diesem Falle ist es offenbar sinnlos, von der Geschwindigkeit an einem bestimmten Orte zu sprechen, weil ja die Geschwindigkeit erst durch zwei Orte definiert werden kann und weil folglich umgekehrt zu jedem Punkt je zwei verschiedene Geschwindigkeiten gehören.

Es entsteht daher die Frage, ob es nicht durch eine genauere Analyse jener kinematischen und mechanischen Begriffe möglich sei, die bis jetzt in der anschaulichen Deutung der Quantenmechanik bestehenden Widersprüche aufzuklären und zu einem anschaulichen Verständnis der quantenmechanischen Relationen zu kommen<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Die vorliegende Arbeit ist aus Bestrebungen und Wünschen entstanden, denen schon viel früher, vor dem Entstehen der Quantenmechanik, andere Forscher deutlichen Ausdruck gegeben haben. Ich erinnere hier besonders an Bohrs Ar-

§ 1. Die Begriffe: Ort, Bahn, Geschwindigkeit, Energie. Um das quantenmechanische Verhalten irgend eines Gegenstandes verfolgen zu können, muß man die Masse dieses Gegenstandes und die Wechselwirkungskräfte mit irgendwelchen Feldern und anderen Gegenständen kennen. Nur dann kann die Hamiltonsche Funktion des quantenmechanischen Systems aufgestellt werden. [Die folgenden Überlegungen sollen sich im allgemeinen auf die nichtrelativistische Quantenmechanik beziehen, da die Gesetze der quantentheoretischen Elektrodynamik noch sehr unvollständig bekannt sind]<sup>1)</sup>. Über die „Gestalt“ des Gegenstandes ist irgendwelche weitere Aussage unnötig, am zweckmäßigsten bezeichnet man die Gesamtheit jener Wechselwirkungskräfte mit dem Worte Gestalt.

Wenn man sich darüber klar werden will, was unter dem Worte „Ort des Gegenstandes“, z. B. des Elektrons (relativ zu einem gegebenen Bezugssystem), zu verstehen sei, so muß man bestimmte Experimente angeben, mit deren Hilfe man den „Ort des Elektrons“ zu messen gedenkt; anders hat dieses Wort keinen Sinn. An solchen Experimenten, die im Prinzip den „Ort des Elektrons“ sogar beliebig genau zu bestimmen gestatten, ist kein Mangel, z. B.: Man beleuchte das Elektron und betrachte es unter einem Mikroskop. Die höchste erreichbare Genauigkeit der Ortsbestimmung ist hier im wesentlichen durch die Wellenlänge des benutzten Lichtes gegeben. Man wird aber im Prinzip etwa ein  $\Gamma$ -Strahl-Mikroskop bauen und mit diesem die Ortsbestimmung so genau durchführen können, wie man will. Es ist indessen bei dieser Bestimmung ein Nebenumstand wesentlich: der Comptoneffekt. Jede Beobachtung des vom Elektron kommenden Streulichtes setzt einen lichtelektrischen Effekt (im Auge, auf der photographischen Platte, in der Photozelle) voraus, kann also auch so gedeutet werden, daß ein Lichtquant das Elektron trifft, an diesem reflektiert oder abgelenkt wird und dann durch die Linsen des Mikro-

---

beiten über die Grundpostulate der Quantentheorie (z. B. ZS. f. Phys. **13**, 117, 1923) und Einsteins Diskussionen über den Zusammenhang zwischen Wellenfeld und Lichtquanten. Am klarsten sind in neuester Zeit die hier besprochenen Probleme diskutiert und die auftretenden Fragen teilweise beantwortet worden von W. Pauli (Quantentheorie, Handb. d. Phys., Bd. XXIII, weiterhin als l. c. zitiert); durch die Quantenmechanik hat sich an der Formulierung dieser Probleme durch Pauli nur wenig geändert. Es ist mir auch eine besondere Freude, an dieser Stelle Herrn W. Pauli für die vielfache Anregung zu danken, die ich aus gemeinsamen mündlichen und schriftlichen Diskussionen empfangen habe, und die zu der vorliegenden Arbeit wesentlich beigetragen hat.

<sup>1)</sup> In jüngster Zeit sind jedoch auf diesem Gebiet große Fortschritte erzielt worden durch Arbeiten von P. Dirac [Proc. Roy. Soc. (A) **114**, 243, 1927 und später erscheinende Untersuchungen].

skops nochmal abgelenkt den Photoeffekt auslöst. Im Augenblick der Ortsbestimmung, also dem Augenblick, in dem das Lichtquant vom Elektron abgelenkt wird, verändert das Elektron seinen Impuls unstetig. Diese Änderung ist um so größer, je kleiner die Wellenlänge des benutzten Lichtes, d. h. je genauer die Ortsbestimmung ist. In dem Moment, in dem der Ort des Elektrons bekannt ist, kann daher sein Impuls nur bis auf Größen, die jener unstetigen Änderung entsprechen, bekannt sein; also je genauer der Ort bestimmt ist, desto ungenauer ist der Impuls bekannt und umgekehrt; hierin erblicken wir eine direkte anschauliche Erläuterung der Relation  $p q - q p = \frac{h}{2\pi i}$ . Sei  $q_1$  die Genauigkeit, mit der der Wert  $q$  bekannt ist ( $q_1$  ist etwa der mittlere Fehler von  $q$ ), also hier die Wellenlänge des Lichtes,  $p_1$  die Genauigkeit, mit der der Wert  $p$  bestimmbar ist, also hier die unstetige Änderung von  $p$  beim Comptoneffekt, so stehen nach elementaren Formeln des Comptoneffekts  $p_1$  und  $q_1$  in der Beziehung

$$p_1 q_1 \sim h. \quad (1)$$

Daß diese Beziehung (1) in direkter mathematischer Verbindung mit der Vertauschungsrelation  $p q - q p = \frac{h}{2\pi i}$  steht, wird später gezeigt werden. Hier sei darauf hingewiesen, daß Gleichung (1) der präzise Ausdruck für die Tatsachen ist, die man früher durch Einteilung des Phasenraumes in Zellen der Größe  $h$  zu beschreiben suchte.

Zur Bestimmung des Elektronenortes kann man auch andere Experimente, z. B. Stoßversuche vornehmen. Eine genaue Messung des Ortes erfordert Stöße mit sehr schnellen Partikeln, da bei langsamen Elektronen die Beugungserscheinungen, die nach Einstein eine Folge der de Broglie-Wellen sind (siehe z. B. Ramsauereffekt) eine genaue Bestimmung des Ortes verhindern. Bei einer genauen Ortsmessung ändert sich der Impuls des Elektrons also wieder unstetig und eine einfache Abschätzung der Genauigkeiten mit den Formeln der de Broglieschen Wellen gibt wieder die Relation (1).

Durch diese Diskussion scheint der Begriff „Ort des Elektrons“ klar genug definiert und es sei nur noch ein Wort über die „Größe“ des Elektrons hinzugefügt. Wenn zwei sehr schnelle Teilchen im sehr kurzen Zeitintervall  $\Delta t$  hintereinander das Elektron treffen, so liegen die durch die beiden Teilchen definierten Orte des Elektrons einander sehr nahe in einem Abstand  $\Delta l$ . Aus den Gesetzen, die bei  $\alpha$ -Strahlen beobachtet sind, schließen wir, daß sich  $\Delta l$  bis auf Größen der Ordnung  $10^{-12}$  cm

herabdrücken läßt, wenn nur  $\Delta t$  hinreichend klein und die Teilchen hinreichend schnell gewählt werden. Diesen Sinn hat es, wenn wir sagen, das Elektron sei eine Korpuskel, deren Radius nicht größer als  $10^{-12}$  cm ist.

Gehen wir nun über zum Begriff „Bahn des Elektrons“. Unter Bahn verstehen wir eine Reihe von Raumpunkten (in einem gegebenen Bezugssystem), die das Elektron als „Orte“ nacheinander annimmt. Da wir schon wissen, was unter „Ort zu einer bestimmten Zeit“ zu verstehen sei, treten hier keine neuen Schwierigkeiten auf. Trotzdem ist leicht einzusehen, daß z. B. der oft gebrauchte Ausdruck: die „1 S-Bahn des Elektrons im Wasserstoffatom“ von unserem Gesichtspunkt aus keinen Sinn hat. Um diese 1 S-„Bahn“ zu messen, müßte nämlich das Atom mit Licht beleuchtet werden, dessen Wellenlänge jedenfalls erheblich kürzer als  $10^{-8}$  cm ist. Von solchem Licht aber genügt ein einziges Lichtquant, um das Elektron völlig aus seiner „Bahn“ zu werfen (weshalb von einer solchen Bahn immer nur ein einziger Raumpunkt definiert werden kann), das Wort „Bahn“ hat hier also keinen vernünftigen Sinn. Dies kann ohne Kenntnis der neueren Theorien schon einfach aus den experimentellen Möglichkeiten gefolgert werden.

Dagegen kann die gedachte Ortsmessung an vielen Atomen im 1 S-Zustand ausgeführt werden. (Atome in einem gegebenen „stationären“ Zustand lassen sich z. B. durch den Stern-Gerlachversuch im Prinzip isolieren.) Es muß also für einen bestimmten Zustand z. B. 1 S des Atoms eine Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Orte des Elektrons geben, die dem Mittelwert der klassischen Bahn über alle Phasen entspricht und die durch Messungen beliebig genau feststellbar ist. Nach Born<sup>1)</sup> ist diese Funktion durch  $\psi_{1S}(q)\bar{\psi}_{1S}(q)$  gegeben, wenn  $\psi_{1S}(q)$  die zum Zustand 1 S gehörige Schrödingersche Wellenfunktion bedeutet. Mit Dirac<sup>1)</sup> und Jordan<sup>1)</sup> möchte ich im Hinblick auf spätere Ver-

---

<sup>1)</sup> Die statistische Bedeutung der de Broglie-Wellen wurde zuerst formuliert von A. Einstein (Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1925, S. 3). Dieses statistische Element in der Quantenmechanik spielt dann eine wesentliche Rolle bei M. Born, W. Heisenberg und P. Jordan, Quantenmechanik II (ZS. f. Phys. **35**, 557, 1926), bes. Kap. 4, § 3, und P. Jordan (ZS. f. Phys. **37**, 376, 1926); es wird in einer grundlegenden Arbeit von M. Born (ZS. f. Phys. **38**, 803, 1926) mathematisch analysiert und zur Deutung der Stoßphänomene benutzt. Die Begründung des Wahrscheinlichkeitsansatzes aus der Transformationstheorie der Matrizen findet sich in den Arbeiten: W. Heisenberg (ZS. f. Phys. **40**, 501, 1926), P. Jordan (ebenda **40**, 661, 1926), W. Pauli (Anm. in ZS. f. Phys. **41**, 81, 1927), P. Dirac (Proc. Roy. Soc. (A) **113**, 621, 1926), P. Jordan (ZS. f. Phys. **40**, 809, 1926). Allgemein ist die statistische Seite der Quantenmechanik diskutiert bei P. Jordan (Naturwiss. **15**, 105, 1927) und M. Born (Naturwiss. **15**, 238, 1927).

allgemeinerungen sagen: Die Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch  $S(1 S, q) \bar{S}(1 S, q)$ , wo  $S(1 S, q)$  diejenige Kolonne der Transformationsmatrix  $S(E, q)$  von  $E$  nach  $q$  bedeutet, die zu  $E = E_{1S}$  gehört ( $E = \text{Energie}$ ).

Darin, daß in der Quantentheorie zu einem bestimmten Zustand, z. B.  $1 S$ , nur die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Elektronenortes angegeben werden kann, mag man mit Born und Jordan einen charakteristisch statistischen Zug der Quantentheorie im Gegensatz zur klassischen Theorie erblicken. Man kann aber, wenn man will, mit Dirac auch sagen, daß die Statistik durch unsere Experimente hereingebracht sei. Denn offenbar wäre auch in der klassischen Theorie nur die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Elektronenortes angebar, solange wir die Phasen des Atoms nicht kennen. Der Unterschied zwischen klassischer und Quantenmechanik besteht vielmehr darin: Klassisch können wir uns durch vorausgehende Experimente immer die Phase bestimmt denken. In Wirklichkeit ist dies aber unmöglich, weil jedes Experiment zur Bestimmung der Phase das Atom zerstört bzw. verändert. In einem bestimmten stationären „Zustand“ des Atoms sind die Phasen prinzipiell unbestimmt, was man als direkte Erläuterung der bekannten Gleichungen

$$Et - tE = \frac{h}{2\pi i} \quad \text{oder} \quad Jw - wJ = \frac{h}{2\pi i}$$

ansehen kann. ( $J = \text{Wirkungsvariable}$ ,  $w = \text{Winkelvariable}$ .)

Das Wort „Geschwindigkeit“ eines Gegenstandes läßt sich durch Messungen leicht definieren, wenn es sich um kräftefreie Bewegungen handelt. Man kann z. B. den Gegenstand mit rotem Licht beleuchten und durch den Dopplereffekt des gestreuten Lichtes die Geschwindigkeit des Teilchens ermitteln. Die Bestimmung der Geschwindigkeit wird um so genauer, je langwelliger das benutzte Licht ist, da dann die Geschwindigkeitsänderung des Teilchens pro Lichtquant durch Comptoneffekt um so geringer wird. Die Ortsbestimmung wird entsprechend ungenau, wie es der Gleichung (1) entspricht. Wenn die Geschwindigkeit des Elektrons im Atom in einem bestimmten Augenblick gemessen werden soll, so wird man etwa in diesem Augenblick die Kernladung und die Kräfte von den übrigen Elektronen plötzlich verschwinden lassen, so daß die Bewegung von da ab kräftefrei erfolgt, und wird dann die oben angegebene Bestimmung durchführen. Wieder kann man sich, wie oben, leicht überzeugen, daß eine Funktion  $p(t)$  für einen gegebenen Zustand eines Atoms, z. B.  $1 S$ , nicht definiert werden kann. Dagegen gibt es

wieder eine Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $p$  in diesem Zustand, die nach Dirac und Jordan den Wert  $S(1 S, p) \bar{S}(1 S, p)$  hat.  $S(1 S, p)$  bedeutet wieder diejenige Kolonne der Transformationsmatrix  $S(E, p)$  von  $E$  nach  $p$ , die zu  $E = E_{1S}$  gehört.

Schließlich sei noch auf die Experimente hingewiesen, welche gestatten, die Energie oder die Werte der Wirkungsvariablen  $J$  zu messen; solche Experimente sind besonders wichtig, da wir nur mit ihrer Hilfe definieren können, was wir meinen, wenn wir von der diskontinuierlichen Änderung der Energie und der  $J$  sprechen. Die Franck-Hertz'schen Stoßversuche gestatten, die Energiemessung der Atome wegen der Gültigkeit des Energiesatzes in der Quantentheorie zurückzuführen auf die Energiemessung geradlinig sich bewegender Elektronen. Diese Messung läßt sich im Prinzip beliebig genau durchführen, wenn man nur auf die gleichzeitige Bestimmung des Elektronenortes, d. h. der Phase verzichtet (vgl. oben die Bestimmung von  $p$ ), der Relation  $E t - t E = \frac{h}{2\pi i}$  ent-

sprechend. Der Stern-Gerlachversuch gestattet die Bestimmung des magnetischen oder eines mittleren elektrischen Moments des Atoms, also die Messung von Größen, die allein von den Wirkungsvariablen  $J$  abhängen. Die Phasen bleiben prinzipiell unbestimmt. Ebenso wenig wie es sinnvoll ist, von der Frequenz einer Lichtwelle in einem bestimmten Augenblick zu sprechen, kann von der Energie eines Atoms in einem bestimmten Moment gesprochen werden. Dem entspricht im Stern-Gerlachversuch der Umstand, daß die Genauigkeit der Energiemessung um so geringer wird, je kürzer die Zeitspanne ist, in der die Atome unter dem Einfluß der ablenkenden Kraft stehen<sup>1)</sup>. Eine obere Grenze für die ablenkende Kraft ist nämlich dadurch gegeben, daß die potentielle Energie jener ablenkenden Kraft innerhalb des Strahlenbündels nur um Beträge variieren darf, die erheblich kleiner sind als die Energiedifferenzen der stationären Zustände, wenn eine Bestimmung der Energie der stationären Zustände möglich sein soll. Sei  $E_1$  ein Energiebetrag, der dieser Bedingung genügt ( $E_1$  gibt zugleich die Genauigkeit jener Energiemessung an), so ist also  $E_1/d$  der Höchstwert der ablenkenden Kraft, wenn  $d$  die Breite des Strahlenbündels (meßbar durch die Weite der benutzten Blende) bedeutet. Die Winkelablenkung des Atomstrahls ist dann  $\frac{E_1 t_1}{d p}$ , wo  $t_1$  die Zeitspanne bezeichnet, in der die Atome unter Einfluß der ablenkenden

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu W. Pauli, l. c. S. 61.

Kraft stehen,  $p$  den Impuls der Atome in der Strahlrichtung. Diese Ablenkung muß mindestens gleicher Größenordnung sein wie die natürliche durch Beugung an der Blende hervorgebrachte Verbreiterung des Strahls, damit eine Messung möglich sei. Die Winkelablenkung durch Beugung ist etwa  $\lambda/d$ , wenn  $\lambda$  die de Brogliesche Wellenlänge bezeichnet, also

$$\frac{\lambda}{d} \sim \frac{E_1 t_1}{dp} \quad \text{oder da} \quad \lambda = \frac{h}{p},$$

$$E_1 t_1 \sim h. \quad (2)$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (1) und zeigt, wie eine genaue Energiebestimmung nur durch eine entsprechende Ungenauigkeit in der Zeit erreicht werden kann.

§ 2. Die Dirac-Jordansche Theorie. Die Resultate des vorhergehenden Abschnitts möchte man zusammenfassen und verallgemeinern in dieser Behauptung: Alle Begriffe, die in der klassischen Theorie zur Beschreibung eines mechanischen Systems verwendet werden, lassen sich auch für atomare Vorgänge analog den klassischen Begriffen exakt definieren. Die Experimente, die solcher Definition dienen, tragen aber rein erfahrungsgemäß eine Unbestimmtheit in sich, wenn wir von ihnen die simultane Bestimmung zweier kanonisch konjugierten Größen verlangen. Der Grad dieser Unbestimmtheit ist durch die (auf irgendwelche kanonisch konjugierten Größen erweiterte) Relation (1) gegeben. Es liegt nahe, hier die Quantentheorie mit der speziellen Relativitätstheorie zu vergleichen. Nach der Relativitätstheorie läßt sich das Wort „gleichzeitig“ nicht anders definieren, als durch Experimente, in welche die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts wesentlich eingeht. Gäbe es eine „schärfere“ Definition der Gleichzeitigkeit, also z. B. Signale, die sich unendlich schnell fortpflanzen, so wäre die Relativitätstheorie unmöglich. Weil es solche Signale aber nicht gibt, weil vielmehr in der Definition der Gleichzeitigkeit schon die Lichtgeschwindigkeit vorkommt, ist Raum geschaffen für das Postulat der konstanten Lichtgeschwindigkeit, deshalb steht dieses Postulat mit dem sinngemäßen Gebrauch der Wörter „Ort, Geschwindigkeit, Zeit“ nicht in Widerspruch. Ähnlich steht es mit der Definition der Begriffe: „Elektronenort, Geschwindigkeit“ in der Quantentheorie. Alle Experimente, die wir zur Definition dieser Worte verwenden können, enthalten notwendig die durch Gleichung (1) angegebene Ungenauigkeit, wenn sie auch den einzelnen Begriff  $p$ ,  $q$  exakt zu definieren gestatten. Gäbe es Experimente, die gleichzeitig eine „schärfere“ Bestimmung von  $p$  und  $q$



ermöglichen, als es der Gleichung (1) entspricht, so wäre die Quantenmechanik unmöglich. Diese Ungenauigkeit, die durch Gleichung (1) festgelegt ist, schafft also erst Raum für die Gültigkeit der Beziehungen, die in den quantenmechanischen Vertauschungsrelationen

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

ihren prägnanten Ausdruck finden; sie ermöglicht diese Gleichung, ohne daß der physikalische Sinn der Größen  $p$  und  $q$  geändert werden müßte.

Für diejenigen physikalischen Phänomene, deren quantentheoretische Formulierung noch unbekannt ist (z. B. die Elektrodynamik), bedeutet Gleichung (1) eine Forderung, die zum Auffinden der neuen Gesetze nützlich sein mag. Für die Quantenmechanik läßt sich Gleichung (1) durch eine geringfügige Verallgemeinerung aus der Dirac-Jordanschen Formulierung herleiten. Wenn wir für den bestimmten Wert  $\eta$  irgend eines Parameters den Ort  $q$  des Elektrons zu  $q'$  bestimmen mit einer Genauigkeit  $q_1$ , so können wir dieses Faktum durch eine Wahrscheinlichkeitsamplitude  $S(\eta, q)$  zum Ausdruck bringen, die nur in einem Gebiet der ungefähren Größe  $q_1$  um  $q'$  von Null merklich verschieden ist. Insbesondere kann man z. B. setzen

$$S(\eta, q) \text{ prop } e^{-\frac{(q-q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{h} p'(q-q')}, \text{ also } \overline{S\overline{S}} \text{ prop } e^{-\frac{(q-q')^2}{q_1^2}}. \quad (3)$$

Dann gilt für die zu  $p$  gehörige Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$S(\eta, p) = \int S(\eta, q) S(q, p) dq. \quad (4)$$

Für  $S(q, p)$  kann nach Jordan gesetzt werden

$$S(q, p) = e^{\frac{2\pi i p q}{h}}. \quad (5)$$

Dann wird nach (4)  $S(\eta, p)$  nur für Werte von  $p$ , für welche  $\frac{2\pi(p-p')q_1}{h}$  nicht wesentlich größer als 1 ist, merklich von Null verschieden sein. Insbesondere gilt im Falle (3):

$$S(\eta, p) \text{ prop } \int e^{\frac{2\pi i(p-p')q}{h} - \frac{(q-q')^2}{2q_1^2}} dq,$$

d. h.

$$S(\eta, p) \text{ prop } e^{-\frac{(p-p')^2}{2p_1^2} + \frac{2\pi i}{h} q'(p-p')}, \text{ also } \overline{S\overline{S}} \text{ prop } e^{-\frac{(p-p')^2}{p_1^2}},$$

wo

$$p_1 q_1 = \frac{h}{2\pi}. \quad (6)$$

Die Annahme (3) für  $S(\eta, q)$  entspricht also dem experimentellen Faktum, daß der Wert  $p'$  für  $p$ , der Wert  $q'$  für  $q$  [mit der Genauigkeitsbeschränkung (6)] gemessen wurde.

Rein mathematisch ist für die Dirac-Jordansche Formulierung der Quantenmechanik charakteristisch, daß die Relationen zwischen  $p$ ,  $q$ ,  $E$  usw. als Gleichungen zwischen sehr allgemeinen Matrizen geschrieben werden können, derart, daß irgend eine vorgegebene quantentheoretische Größe als Diagonalmatrix erscheint. Die Möglichkeit einer solchen Schreibweise leuchtet ein, wenn man sich die Matrizen anschaulich als Tensoren (z. B. Trägheitsmomente) in mehrdimensionalen Räumen deutet, zwischen denen mathematische Beziehungen bestehen. Man kann die Achsen des Koordinatensystems, in dem man diese mathematischen Beziehungen ausdrückt, immer in die Hauptachsen eines dieser Tensoren legen. Schließlich kann man die mathematische Beziehung zwischen zwei Tensoren  $A$  und  $B$  auch immer durch die Transformationsformeln charakterisieren, die ein nach den Hauptachsen von  $A$  orientiertes Koordinatensystem in ein anderes überführen, das nach den Hauptachsen von  $B$  orientiert ist. Die letztere Formulierung entspricht der Schrödingerschen Theorie. Als die eigentlich „invariante“, von allen Koordinatensystemen unabhängige Formulierung der Quantenmechanik wird man dagegen die Diracsche Schreibweise der  $q$ -Zahlen ansehen. Wenn wir aus jenem mathematischen Schema physikalische Resultate ableiten wollen, so müssen wir den quantentheoretischen Größen, also den Matrizen (oder „Tensoren“ im mehrdimensionalen Raum) Zahlen zuordnen. Dies ist so zu verstehen, daß in jenem mehrdimensionalen Raum eine bestimmte Richtung willkürlich vorgegeben wird (nämlich durch die Art des angestellten Experiments festgesetzt wird) und gefragt wird, welches der „Wert“ der Matrix (z. B. in jenem Bilde der Wert des Trägheitsmoments) in dieser vorgegebenen Richtung sei. Diese Frage hat nur dann einen eindeutigen Sinn, wenn die vorgegebene Richtung mit der Richtung einer der Hauptachsen jener Matrix zusammenfällt; in diesem Falle gibt es eine exakte Antwort auf die gestellte Frage. Aber auch, wenn die vorgegebene Richtung nur wenig abweicht von der einer der Hauptachsen der Matrix, so kann man noch mit einer gewissen durch die relative Neigung gegebenen Ungenauigkeit, mit einem gewissen wahrscheinlichen Fehler von dem „Wert“ der Matrix in der vorgegebenen Richtung sprechen. Man kann also sagen: Jeder quantentheoretischen Größe oder Matrix läßt sich eine Zahl, die ihren „Wert“ angibt, mit einem bestimmten wahrscheinlichen Fehler zuordnen; der wahrscheinliche Fehler hängt vom

Koordinatensystem ab; für jede quantentheoretische Größe gibt es je ein Koordinatensystem, in dem der wahrscheinliche Fehler für diese Größe verschwindet. Ein bestimmtes Experiment kann also niemals über alle quantentheoretischen Größen genaue Auskunft geben, vielmehr teilt es in einer für das Experiment charakteristischen Weise die physikalischen Größen in „bekannte“ und „unbekannte“ (oder: mehr und weniger genau bekannte Größen) ein. Die Resultate zweier Experimente lassen sich nur dann exakt auseinander herleiten, wenn die beiden Experimente die physikalischen Größen in gleicher Weise in „bekannte“ und „unbekannte“ einteilen (d. h. wenn die Tensoren in jenem mehrfach zur Veranschaulichung gebrauchten mehrdimensionalen Raum in beiden Experimenten von der gleichen Richtung aus „angesehen“ werden). Bewirken zwei Experimente verschiedene Einteilungen in „Bekanntes“ und „Unbekanntes“, so läßt sich der Zusammenhang der Resultate jener Experimente füglich nur statistisch angeben.

Zur genaueren Diskussion dieses statistischen Zusammenhangs sei ein Gedankenexperiment vorgenommen. Ein Stern-Gerlachscher Atomstrahl werde zunächst durch ein Feld  $F_1$  geschickt, das so stark inhomogen in der Strahlrichtung ist, daß es merklich viele Übergänge durch „Schüttelwirkung“ hervorruft. Dann laufe der Atomstrahl eine Weile frei, in einem bestimmten Abstand von  $F_1$  aber beginne ein zweites Feld  $F_2$ , ähnlich inhomogen wie  $F_1$ . Zwischen  $F_1$  und  $F_2$  und hinter  $F_2$  sei es möglich, die Anzahl der Atome in den verschiedenen stationären Zuständen durch ein eventuell angelegtes Magnetfeld zu messen. Die Strahlungskräfte der Atome seien Null gesetzt. Wenn wir wissen, daß ein Atom im Zustand der Energie  $E_n$  war, bevor es  $F_1$  passierte, so können wir dieses experimentelle Faktum dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir dem Atom eine Wellenfunktion — z. B. im  $p$ -Raum — mit der bestimmten Energie  $E_n$  und der unbestimmten Phase  $\beta_n$

$$S(E_n, p) = \psi(E_n, p) e^{-\frac{2\pi i E_n (\alpha + \beta_n)}{h}}$$

zuordnen. Nach dem Durchqueren des Feldes  $F_1$  wird sich diese Funktion verwandelt haben in<sup>1)</sup>

$$S(E_n, p) \xrightarrow{F_1} \sum_m c_{nm} \psi(E_m, p) e^{-\frac{2\pi i E_m (\alpha + \beta_m)}{h}} \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Vgl. P. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **112**, 661, 1926 und M. Born, ZS. f. Phys. **40**, 167, 1926.

Hierin seien die  $\beta_m$  irgendwie willkürlich festgesetzt, so daß die  $c_{nm}$  durch  $F_1$  eindeutig bestimmt sind. Die Matrix  $c_{nm}$  transformiert die Energiewerte vor dem Durchgang durch  $F_1$  auf die nach dem Durchgang durch  $F_1$ . Führen wir hinter  $F_1$  eine Bestimmung der stationären Zustände z. B. durch ein inhomogenes Magnetfeld aus, so werden wir mit einer Wahrscheinlichkeit  $c_{nm} \bar{c}_{nm}$  finden, daß das Atom vom Zustand  $n$  in den Zustand  $m$  übergegangen ist. Wenn wir experimentell feststellen, daß das Atom eben in den Zustand  $m$  wirklich übergegangen sei, so werden wir ihm zur Berechnung alles Folgenden nicht die Funktion  $\sum_m c_{nm} S_m$ , sondern eben die Funktion  $S_m$  mit unbestimmter Phase zuzuordnen haben; durch die experimentelle Feststellung: „Zustand  $m$ “ wählen wir aus der Fülle der verschiedenen Möglichkeiten ( $c_{nm}$ ) eine bestimmte:  $m$  aus, zerstören aber gleichzeitig, wie nachher erläutert wird, alles, was an Phasenbeziehungen noch in den Größen  $c_{nm}$  enthalten war. Beim Durchgang des Atomstrahls durch  $F_2$  wiederholt sich das gleiche wie bei  $F_1$ . Es seien  $d_{nm}$  die Koeffizienten der Transformationsmatrix, die die Energien vor  $F_2$  auf die nach  $F_2$  transformieren. Wenn zwischen  $F_1$  und  $F_2$  keine Bestimmung des Zustandes vorgenommen wird, so verwandelt sich die Eigenfunktion nach folgendem Schema:

$$S(E_n, p) \xrightarrow{F_1} \sum_m c_{nm} S(E_m, p) \xrightarrow{F_2} \sum_m \sum_l c_{nm} d_{ml} S(E_l, p). \quad (8)$$

Es sei  $\sum_m c_{nm} d_{ml} = e_{nl}$  gesetzt. Wird der stationäre Zustand des Atoms hinter  $F_2$  festgestellt, so wird man mit einer Wahrscheinlichkeit  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$  den Zustand  $l$  finden. Wenn dagegen zwischen  $F_1$  und  $F_2$  die Feststellung: „Zustand  $m$ “ gemacht wurde, so wird die Wahrscheinlichkeit für „ $l$ “ hinter  $F_2$  durch  $d_{ml} \bar{d}_{ml}$  gegeben sein. Bei mehrfacher Wiederholung des ganzen Experiments (wobei jedesmal zwischen  $F_1$  und  $F_2$  der Zustand bestimmt werde) wird man also hinter  $F_2$  den Zustand  $l$  mit der relativen Häufigkeit  $Z_{nl} = \sum_m c_{nm} \bar{c}_{nm} d_{ml} \bar{d}_{ml}$  beobachten. Dieser Ausdruck stimmt nicht überein mit  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$ . Jordan (l. c.) hat deswegen von einer „Interferenz der Wahrscheinlichkeiten“ gesprochen. Dem möchte ich mich aber nicht anschließen. Denn die beiden Experimente, die zu  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$  bzw.  $Z_{nl}$  führen, sind ja physikalisch wirklich verschieden. In einem Falle erleidet das Atom zwischen  $F_1$  und  $F_2$  keine Störung, im anderen wird es durch die Apparate, die eine Feststellung des stationären Zustandes ermöglichen, gestört. Diese Apparate haben zur Folge, daß sich die „Phase“ des Atoms um prinzipiell unkontrollier-

bare Beträge ändert, ebenso, wie sich bei einer Bestimmung des Elektronenortes der Impuls ändert (vgl. § 1). Das Magnetfeld zur Bestimmung des Zustandes zwischen  $F_1$  und  $F_2$  wird die Eigenwerte  $E$  verstimmen, bei der Beobachtung der Bahn des Atomstrahls werden (ich denke etwa an Wilsonaufnahmen) die Atome statistisch verschieden und unkontrollierbar gebremst usf. Dies hat zur Folge, daß die endgültige Transformationsmatrix  $e_{nl}$  (von den Energiewerten vor dem Eintreten in  $F_1$  auf die nach dem Austreten aus  $F_2$ ) nicht mehr durch  $\sum_m c_{nm} d_{ml}$  gegeben ist,

sondern jedes Glied der Summe hat noch einen unbekanntem Phasenfaktor. Wir können also nur erwarten, daß der Mittelwert von  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$  über alle diese potentiellen Phasenänderungen gleich  $Z_{nl}$  ist. Eine einfache Rechnung ergibt, daß dies der Fall ist. — Wir können also nach gewissen statistischen Regeln von einem Experiment auf die möglichen Resultate eines anderen schließen. Das andere Experiment selbst wählt aus der Fülle der Möglichkeiten eine ganz bestimmte aus und beschränkt dadurch für alle späteren Experimente die Möglichkeiten. Eine solche Deutung der Gleichung für die Transformationsmatrix  $S$  oder der Schrödingerschen Wellengleichung ist nur deshalb möglich, weil die Summe von Lösungen wieder eine Lösung darstellt. Darin erblicken wir den tiefen Sinn der Linearität der Schrödingerschen Gleichungen; deswegen können sie nur als Gleichungen für Wellen im Phasenraum verstanden werden und deswegen möchten wir jeden Versuch, diese Gleichungen z. B. im relativistischen Falle (bei mehreren Elektronen) durch nichtlineare zu ersetzen, für aussichtslos halten.

§ 3. Der Übergang von der Mikro- zur Makromechanik. Durch die in den vorausgehenden Abschnitten durchgeführte Analyse der Worte „Elektronenort“, „Geschwindigkeit“, „Energie“ usw. scheinen mir die Begriffe der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik hinreichend geklärt, so daß ein anschauliches Verständnis auch der makroskopischen Vorgänge vom Standpunkt der Quantenmechanik aus möglich sein muß. Der Übergang von der Mikro- zur Makromechanik ist schon von Schrödinger<sup>1)</sup> behandelt worden, aber ich glaube nicht, daß die Schrödingersche Überlegung das Wesen des Problems trifft, und zwar aus folgenden Gründen: Nach Schrödinger soll in hohen Anregungszuständen eine Summe von Eigenschwingungen ein nicht allzu großes Wellenpaket ergeben können, das seinerseits unter periodischen Änderungen seiner Größe die periodischen Bewegungen des klassischen „Elektrons“

<sup>1)</sup> E. Schrödinger, Naturwiss. 14, 664, 1926.

ausführt. Hiergegen ist folgendes einzuwenden: Wenn das Wellenpaket solche Eigenschaften hätte, wie sie hier beschrieben wurden, so wäre die vom Atom ausgesandte Strahlung in eine Fourierreihe entwickelbar, bei der die Frequenzen der Oberschwingungen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz sind. Die Frequenzen der vom Atom ausgesandten Spektrallinien sind aber nach der Quantenmechanik nie ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz — ausgenommen den Spezialfall des harmonischen Oszillators. Schrödingers Überlegung ist also nur für den von ihm behandelten harmonischen Oszillator durchführbar, in allen anderen Fällen breitet sich im Laufe der Zeit ein Wellenpaket über den ganzen Raum in der Umgebung des Atoms aus. Je höher der Anregungszustand des Atoms ist, desto langsamer erfolgt jene Zerstreuung des Wellenpakets. Aber wenn man lange genug wartet, wird sie eintreten. Das oben angeführte Argument über die vom Atom ausgesandte Strahlung läßt sich zunächst gegen alle Versuche anwenden, die einen direkten Übergang der Quantenmechanik in die klassische für hohe Quantenzahlen erstreben. Man hat deshalb früher versucht, jenem Argument durch Hinweis auf die natürliche Strahlungsbreite der stationären Zustände zu entgehen; sicherlich zu Unrecht, denn erstens ist dieser Ausweg schon beim Wasserstoffatom wegen der geringen Strahlung in hohen Zuständen versperrt, zweitens muß der Übergang der Quantenmechanik in die klassische auch ohne Anleihe bei der Elektrodynamik verständlich sein. Auf diese bekannten Schwierigkeiten, die einer direkten Verbindung der Quantentheorie mit der klassischen im Wege stehen, hat schon früher Bohr<sup>1)</sup> mehrfach hingewiesen. Wir haben sie nur deswegen wieder so ausführlich erläutert, weil sie neuerdings in Vergessenheit zu geraten scheinen.

Ich glaube, daß man die Entstehung der klassischen „Bahn“ prägnant so formulieren kann: Die „Bahn“ entsteht erst dadurch, daß wir sie beobachten: Sei z. B. ein Atom im 1000. Anregungszustand gegeben. Die Bahndimensionen sind hier schon relativ groß, so daß es im Sinne von § 1 genügt, die Bestimmung des Elektronenortes mit verhältnismäßig langwelligem Licht vorzunehmen. Wenn die Bestimmung des Ortes nicht allzu ungenau sein soll, so wird der Comptonrückstoß zur Folge haben, daß das Atom sich nach dem Stoß in irgend einem Zustand zwischen, sagen wir, dem 950. und 1050. befindet; gleichzeitig kann der Impuls des Elektrons mit einer aus (1) bestimmbar Genauigkeit aus dem Dopplereffekt geschlossen werden. Das so gegebene ex-

<sup>1)</sup> N. Bohr, Grundpostulate der Quantentheorie, I. c.

perimentelle Faktum kann man durch ein Wellenpaket — besser Wahrscheinlichkeitspaket — im  $q$ -Raum von einer durch die Wellenlänge des benutzten Lichtes gegebenen Größe, zusammengesetzt im wesentlichen aus Eigenfunktionen zwischen der 950. und der 1050. Eigenfunktion, und durch ein entsprechendes Paket im  $p$ -Raum charakterisieren. Nach einiger Zeit werde eine neue Ortsbestimmung mit der gleichen Genauigkeit ausgeführt. Ihr Resultat läßt sich nach § 2 nur statistisch angeben, als wahrscheinliche Orte kommen alle innerhalb des nun schon verbreiterten Wellenpakets mit berechenbarer Wahrscheinlichkeit in Betracht. Dies wäre in der klassischen Theorie keineswegs anders, denn auch in der klassischen Theorie wäre das Resultat der zweiten Ortsbestimmung wegen der Unsicherheit der ersten Bestimmung nur statistisch angebar; auch die Systembahnen der klassischen Theorie würden sich ähnlich ausbreiten wie das Wellenpaket. Allerdings sind die statistischen Gesetze selbst in der Quantenmechanik und in der klassischen Theorie verschieden. Die zweite Ortsbestimmung wählt aus der Fülle der Möglichkeiten eine bestimmte „ $q$ “ aus und beschränkt für alle folgenden Bestimmungen die Möglichkeiten. Nach der zweiten Ortsbestimmung können die Resultate späterer Messungen nur berechnet werden, indem man dem Elektron wieder ein „kleineres“ Wellenpaket der Größe  $\lambda$  (Wellenlänge des zur Beobachtung benutzten Lichtes) zuordnet. Jede Ortsbestimmung reduziert also das Wellenpaket wieder auf seine ursprüngliche Größe  $\lambda$ . Die „Werte“ der Variablen  $p$  und  $q$  sind während aller Versuche mit einer gewissen Genauigkeit bekannt. Daß die Werte von  $p$  und  $q$  innerhalb dieser Genauigkeitsgrenzen den klassischen Bewegungsgleichungen Folge leisten, kann direkt aus den quantenmechanischen Gesetzen

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}; \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (9)$$

geschlossen werden. Die Bahn kann aber, wie gesagt, nur statistisch aus den Anfangsbedingungen berechnet werden, was man als Folge der prinzipiellen Ungenauigkeit der Anfangsbedingungen betrachten kann. Die statistischen Gesetze sind für die Quantenmechanik und die klassische Theorie verschieden; dies kann unter gewissen Bedingungen zu groben makroskopischen Unterschieden zwischen klassischer und Quantentheorie führen. Bevor ich ein Beispiel hierfür diskutiere, möchte ich an einem einfachen mechanischen System: der kräftefreien Bewegung eines Massenpunktes, zeigen, wie der oben diskutierte Übergang zur klassischen Theorie

mathematisch zu formulieren ist. Die Bewegungsgleichungen lauten (bei eindimensionaler Bewegung)

$$H = \frac{1}{2m} p^2; \quad \dot{q} = \frac{1}{m} p; \quad \dot{p} = 0. \quad (10)$$

Da die Zeit als Parameter (als „c-Zahl“) behandelt werden kann, wenn keine von der Zeit abhängigen äußeren Kräfte vorkommen, so lautet die Lösung dieser Gleichungen:

$$q = \frac{1}{m} p_0 t + q_0; \quad p = p_0, \quad (11)$$

wo  $p_0$  und  $q_0$  Impuls und Ort zur Zeit  $t = 0$  bedeuten. Zur Zeit  $t = 0$  werde [siehe Gleichung (3) bis (6)] der Wert  $q_0 = q'$  mit der Genauigkeit  $q_1$ ,  $p_0 = p'$  mit der Genauigkeit  $p_1$  gemessen. Um aus den „Werten“ von  $p_0$  und  $q_0$  auf die „Werte“ von  $q$  zur Zeit  $t$  zu schließen, muß nach Dirac und Jordan diejenige Transformationsfunktion gefunden werden, die alle Matrizen, bei denen  $q_0$  als Diagonalmatrix erscheint, in solche transformiert, bei denen  $q$  als Diagonalmatrix erscheint.  $p_0$  kann in dem Matrixschema, in dem  $q_0$  als Diagonalmatrix erscheint, durch

den Operator  $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_0}$  ersetzt werden. Nach Dirac [l. c. Gleichung (11)]

gilt dann für die gesuchte Transformationsamplitude  $S(q_0, q)$  die Differentialgleichung:

$$\left\{ \frac{t}{m} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_0} + q_0 \right\} S(q_0, q) = q S(q_0, q) \quad (12)$$

$$\frac{t}{m} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S}{\partial q_0} = (q_0 - q) S(q_0, q)$$

$$S(q_0, q) = \text{const.} \cdot e^{\frac{2\pi i m}{h \cdot t} \int (q - q_0) dq_0} \quad (13)$$

$S\bar{S}$  ist also von  $q_0$  unabhängig, d. h. wenn zur Zeit  $t = 0$   $q_0$  exakt bekannt ist, so sind zu irgendwelcher Zeit  $t > 0$  alle Werte von  $q$  gleich wahrscheinlich, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß  $q$  in einem endlichen Bereich liegt, ist überhaupt Null. Dies ist ja anschaulich auch ohne weiteres klar. Denn die exakte Bestimmung von  $q_0$  führt zu unendlich großem Comptonrückstoß. Das gleiche würde natürlich für jedes beliebige mechanische System gelten. Wenn aber  $q_0$  zur Zeit  $t = 0$  nur mit einer Genauigkeit  $q_1$  und  $p_0$  mit der Genauigkeit  $p_1$  bekannt war [vgl. Gleichung (3)]

$$S(q, q_0) = \text{const.} \cdot e^{-\frac{(q_0 - q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{h} p' (q_0 - q')},$$



so wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion für  $q$  nach der Formel

$$S(\eta, q) = \int S(\eta, q_0) S(q_0, q) dq_0$$

zu berechnen sein. Es ergibt sich

$$S(\eta, q) = \text{const.} \int e^{\frac{2\pi im}{\hbar} \left[ q_0 \left( q - \frac{t}{m} p' \right) - \frac{q_0^2}{2} \right] - \frac{(q' - q_0)^2}{2 q_1^2}} dq_0. \quad (14)$$

Führt man die Abkürzung

$$\beta = \frac{t\hbar}{2\pi m q_1^2} \quad (15)$$

ein, so wird der Exponent in (14)

$$- \frac{1}{2 q_1^2} \left\{ q_0^2 \left( 1 + \frac{i}{\beta} \right) - 2 q_0 \left( q' + \frac{i}{\beta} \left( q - \frac{t}{m} p' \right) \right) + q'^2 \right\}.$$

Das Glied mit  $q'^2$  kann in den konstanten (von  $q$  unabhängigen Faktor) einbezogen werden und die Integration ergibt

$$S(\eta, q) = \text{const.} e^{\frac{1}{2 q_1^2} \frac{\left[ q' + \frac{i}{\beta} \left( q - \frac{t}{m} p' \right) \right]^2}{1 + \frac{i}{\beta}}}, \quad (16)$$

$$= \text{const.} e^{-\frac{\left( q - \frac{t}{m} p' - i\beta q' \right)^2 \left( 1 - \frac{i}{\beta} \right)}{2 q_1^2 (1 + \beta^2)}}.$$

Daraus folgt

$$S(\eta, q) \overline{S(\eta, q)} = \text{const.} e^{-\frac{\left( q - \frac{t}{m} p' - q' \right)^2}{q_1^2 (1 + \beta^2)}}. \quad (17)$$

Das Elektron befindet sich also zur Zeit  $t$  an der Stelle  $\frac{t}{m} p' + q'$  mit einer Genauigkeit  $q_1 \sqrt{1 + \beta^2}$ . Das „Wellenpaket“ oder besser „Wahrscheinlichkeitspaket“ hat sich um den Faktor  $\sqrt{1 + \beta^2}$  vergrößert.  $\beta$  ist nach (15) proportional der Zeit  $t$ , umgekehrt proportional der Masse — dies ist unmittelbar plausibel — und umgekehrt proportional  $q_1^2$ . Eine allzu große Genauigkeit in  $q_0$  hat eine große Ungenauigkeit in  $p_0$  zur Folge und führt deshalb auch zu einer großen Ungenauigkeit in  $q$ . Der Parameter  $\eta$ , den wir oben aus formalen Gründen eingeführt hatten, könnte hier in allen Formeln weggelassen werden, da er in die Rechnung nicht eingeht.

Als Beispiel dafür, daß der Unterschied der klassischen statistischen Gesetze von den quantentheoretischen unter Umständen zu groben makroskopischen Unterschieden zwischen den Resultaten beider Theorien führt, sei die Reflexion eines Elektronenstromes an einem Gitter kurz diskutiert. Wenn die Gitterkonstante von der Größenordnung der

de Broglieschen Wellenlänge der Elektronen ist, so erfolgt die Reflexion in bestimmten diskreten Raumrichtungen, wie die Reflexion von Licht an einem Gitter. Die klassische Theorie gibt hier grob makroskopisch etwas anderes. Trotzdem können wir keineswegs an der Bahn eines einzelnen Elektrons einen Widerspruch gegen die klassische Theorie feststellen. Wir könnten es, wenn wir das Elektron etwa auf eine bestimmte Stelle eines Gitterstrichs lenken könnten und dann feststellen, daß die Reflexion dort unklassisch erfolgt. Wenn wir den Ort des Elektrons aber so genau bestimmen wollen, daß wir sagen können, auf welche Stelle eines Gitterstrichs es trifft, so bekommt das Elektron durch diese Ortsbestimmung eine große Geschwindigkeit, die de Brogliesche Wellenlänge des Elektrons wird um so viel kleiner, daß nun die Reflexion wirklich in dieser Näherung in der klassisch vorgeschriebenen Richtung erfolgen kann und wird, ohne den quantentheoretischen Gesetzen zu widersprechen.

§ 4. Diskussion einiger besonderen Gedankenexperimente. Nach der hier versuchten anschaulichen Deutung der Quantentheorie müssen die Zeitpunkte der Übergänge, der „Quantensprünge“ ebenso konkret, durch Messungen feststellbar sein, wie etwa die Energien in stationären Zuständen. Die Genauigkeit, mit der ein solcher Zeitpunkt ermittelbar ist, wird nach Gleichung (2) durch  $\frac{h}{\Delta E}$  gegeben sein<sup>1)</sup>, wenn  $\Delta E$  die Änderung der Energie beim Quantensprung bedeutet. Wir denken etwa an folgendes Experiment: Ein Atom, zur Zeit  $t = 0$  im Zustand 2, möge durch Strahlung in den Normalzustand 1 übergehen. Dem Atom kann dann etwa analog zu Gleichung (7) die Eigenfunktion

$$S(t, \mathbf{p}) = e^{-\alpha t} \psi(E_2, \mathbf{p}) e^{-\frac{2\pi i E_2 t}{h}} + \sqrt{1 - e^{-2\alpha t}} \psi(E_1, \mathbf{p}) e^{-\frac{2\pi i E_1 t}{h}} \quad (18)$$

zugeordnet werden, wenn wir annehmen, daß die Strahlungsdämpfung sich in einem Faktor der Form  $e^{-\alpha t}$  in den Eigenfunktionen äußert (die wirkliche Abhängigkeit ist vielleicht nicht so einfach). Dieses Atom werde zur Messung seiner Energie durch ein inhomogenes Magnetfeld geschickt, wie dies beim Stern-Gerlachversuch üblich ist, doch soll das unhomogene Feld dem Atomstrahl ein langes Stück Weges folgen. Die jeweilige Beschleunigung wird man etwa dadurch messen, daß man die ganze Strecke, die der Atomstrahl im Magnetfeld durchmißt, in kleine

<sup>1)</sup> Vgl. W. Pauli, l. c. S. 12.

Teilstrecken einteilt, an deren Ende man jeweils die Ablenkung des Strahles feststellt. Je nach der Geschwindigkeit des Atomstrahles entspricht der Einteilung in Teilstrecken am Atom eine Einteilung in kleine Zeitintervalle  $\Delta t$ . Nach § 1, Gleichung (2) entspricht dem Intervall  $\Delta t$  eine Genauigkeit in der Energie von  $\frac{h}{\Delta t}$ . Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Energie  $E$  zu messen, läßt sich direkt schließen aus  $S(p, E)$  und wird daher im Intervall von  $n \Delta t$  bis  $(n+1) \Delta t$  berechnet durch:

$$S(p, E) = \int_{n \Delta t \rightarrow (n+1) \Delta t}^{(n+1) \Delta t} S(p, t) e^{-\frac{2\pi i E t}{h}} dt.$$

Wenn zur Zeit  $(n+1) \Delta t$  die Feststellung: „Zustand 2“ gemacht wird, so ist dem Atom für alles spätere nicht mehr die Eigenfunktion (18) zuzuordnen, sondern eine, die aus (18) hervorgeht, wenn man  $t$  durch  $t - (n+1) \Delta t$  ersetzt. Stellt man dagegen fest: „Zustand 1“, so ist dem Atom von da ab die Eigenfunktion

$$\psi(E_1, p) e^{-\frac{2\pi i E_1 t}{h}}$$

zuzuordnen. Man wird also zunächst in einer Reihe von Intervallen  $\Delta t$  beobachten: „Zustand 2“, dann dauernd „Zustand 1“. Damit eine Unterscheidung der beiden Zustände noch möglich sei, darf  $\Delta t$  nicht unter  $\frac{h}{\Delta E}$  herabgedrückt werden. Mit dieser Genauigkeit ist also der Zeitpunkt des Übergangs bestimmbar. Ein Experiment von der eben geschilderten Art meinen wir ganz im Sinne der alten von Planck, Einstein und Bohr begründeten Auffassung der Quantentheorie, wenn wir von der diskontinuierlichen Änderung der Energie sprechen. Da ein solches Experiment prinzipiell durchführbar ist, muß eine Einigung über seinen Ausgang möglich sein.

In Bohrs Grundpostulaten der Quantentheorie hat die Energie eines Atoms ebenso, wie die Werte der Wirkungsvariablen  $J$  vor anderen Bestimmungsstücken (Ort des Elektrons usw.) den Vorzug, daß sich ihr Zahlwert stets angeben läßt. Diese Vorzugsstellung, die die Energie den anderen quantenmechanischen Größen gegenüber einnimmt, verdankt sie indessen nur dem Umstand, daß sie bei abgeschlossenen Systemen ein Integral der Bewegungsgleichungen darstellt (für die Energiematrix gilt  $E = \text{const}$ ); bei nicht abgeschlossenen Systemen wird dagegen die Energie sich vor keiner anderen quantenmechanischen

Größe auszeichnen. Insbesondere wird man Experimente angeben können, bei denen die Phasen  $w$  des Atoms exakt meßbar sind, bei denen dann aber die Energie prinzipiell unbestimmt bleibt, einer Relation  $Jw - wJ = \frac{\hbar}{2\pi i}$  oder  $J_1 w_1 \sim \hbar$  entsprechend. Ein solches

Experiment stellt z. B. die Resonanzfluoreszenz dar. Bestrahlt man ein Atom mit einer Eigenfrequenz, sagen wir  $\nu_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ , so schwingt

das Atom in Phase mit der äußeren Strahlung, wobei es prinzipiell keinen Sinn hat, zu fragen, in welchem Zustand  $E_1$  oder  $E_2$  das Atom so schwingt. Die Phasenbeziehung zwischen Atom und äußerer Strahlung läßt sich z. B. durch die Phasenbeziehung vieler Atome untereinander (Woods Versuche) feststellen. Will man von Experimenten mit Strahlung lieber absehen, so kann man die Phasenbeziehung auch so messen, daß man genaue Ortsbestimmungen im Sinne des § 1 des Elektrons zu verschiedenen Zeiten relativ zur Phase des eingestrahltten Lichtes (an vielen Atomen) vornimmt. Dem einzelnen Atom wird etwa die „Wellenfunktion“

$$S(q, t) = c_2 \psi_2(E_2, q) e^{-\frac{2\pi i (E_2 t + \beta)}{\hbar}} + \sqrt{1 - c_2^2} \psi_1(E_1, q) e^{-\frac{2\pi i E_1 t}{\hbar}} \quad (19)$$

zugeordnet werden können; hierin hängt  $c_2$  von der Stärke und  $\beta$  von der Phase des eingestrahltten Lichtes ab. Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ortes  $q$  ist also

$$S(q, t) \overline{S(q, t)} = c_2^2 \psi_2 \overline{\psi_2} + (1 - c_2^2) \psi_1 \overline{\psi_1} + c_2 \sqrt{1 - c_2^2} \left( \psi_2 \overline{\psi_1} e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} [(E_2 - E_1)t + \beta]} + \overline{\psi_2} \psi_1 e^{+\frac{2\pi i}{\hbar} [(E_2 - E_1)t + \beta]} \right) \quad (20)$$

Das periodische Glied in (20) ist vom unperiodischen experimentell trennbar, da die Ortsbestimmungen bei verschiedenen Phasen des eingestrahltten Lichtes ausgeführt werden können.

In einem bekannten von Bohr angegebenen Gedankenexperiment werden die Atome eines Stern-Gerlach'schen Atomstrahls zunächst an einer bestimmten Stelle durch eingestrahlttes Licht zur Resonanzfluoreszenz erregt. Nach einem Stück Weges durchlaufen sie ein inhomogenes Magnetfeld; die von den Atomen ausgehende Strahlung kann während des ganzen Weges, vor und hinter dem Magnetfeld, beobachtet werden. Bevor die Atome in das Magnetfeld kommen, besteht gewöhnliche Resonanzfluoreszenz, d. h. analog zur Dispersionstheorie muß angenommen werden, daß alle Atome in Phase mit dem einfallenden Licht Kugelwellen aussenden. Diese letzte Auffassung steht zunächst im Gegensatz zu dem,

was eine grobe Anwendung der Lichtquantentheorie oder der quantentheoretischen Grundregeln ergibt: denn aus ihr würde man schließen, daß nur wenige Atome in den „oberen Zustand“ durch Aufnahme eines Lichtquants gehoben werden, die gesamte Resonanzstrahlung käme also von wenigen intensivstrahlenden erregten Zentren. Es lag daher früher nahe, zu sagen: die Lichtquantenauffassung darf hier nur für die Energie-Impulsbilanz herangezogen werden, „in Wirklichkeit“ strahlen alle Atome im unteren Zustand schwach und kohärent Kugelwellen aus. Nachdem die Atome das Magnetfeld passiert haben, kann aber kaum ein Zweifel sein, daß der Atomstrahl sich in zwei Strahlen geteilt hat, von denen der eine den Atomen im oberen, der andere den Atomen im unteren Zustand entspricht. Wenn nun die Atome im unteren Zustand strahlen, so läge hier eine grobe Verletzung des Energiesatzes vor, denn die gesamte Anregungsenergie steckt in dem Atomstrahl mit den Atomen im oberen Zustand. Vielmehr kann kein Zweifel darüber sein, daß hinter dem Magnetfeld nur der eine Atomstrahl mit den oberen Zuständen Licht — und zwar unkohärentes Licht — der wenigen intensiv strahlenden Atome im oberen Zustand aussendet. Wie Bohr gezeigt hat, macht dieses Gedankenexperiment besonders deutlich, welche Vorsicht manchmal bei der Anwendung des Begriffs: „stationärer Zustand“ nötig ist. Von der hier entwickelten Auffassung der Quantentheorie aus läßt sich eine Diskussion des Bohrschen Experiments ohne Schwierigkeiten durchführen. In dem äußeren Strahlungsfelde sind die Phasen der Atome bestimmt, also hat es keinen Sinn, von der Energie des Atoms zu sprechen. Auch nachdem das Atom das Strahlungsfeld verlassen hat, kann man nicht sagen, daß es sich in einem bestimmten stationären Zustand befände, sofern man nach den Kohärenzeigenschaften der Strahlung fragt. Man kann aber Experimente anstellen, zu prüfen, in welchem Zustand das Atom sei; das Resultat dieses Experiments läßt sich nur statistisch angeben. Ein solches Experiment wird durch das inhomogene Magnetfeld wirklich durchgeführt. Hinter dem Magnetfeld sind die Energien der Atome bestimmt, also die Phasen unbestimmt. Die Strahlung erfolgt hier inkohärent und nur von den Atomen im oberen Zustand. Das Magnetfeld bestimmt die Energien und zerstört daher die Phasenbeziehung. Das Bohrsche Gedankenexperiment ist eine sehr schöne Erläuterung der Tatsache, daß auch die Energie des Atoms „in Wirklichkeit“ keine Zahl, sondern eine Matrix ist. Der Erhaltungssatz gilt für die Energiematrix und deswegen auch für den Wert der Energie so genau, als dieser jeweils gemessen wird. Rechnerisch läßt sich die Aufhebung der Phasen-

beziehung etwa so verfolgen: Seien  $Q$  die Koordinaten des Atomschwerpunktes, so wird man dem Atom statt (19) die Eigenfunktion

$$S(Q, t) S(q, t) = S(Q, q, t) \quad (21)$$

zuordnen, wo  $S(Q, t)$  eine Funktion ist, die [wie  $S(\eta, q)$  in (16)] nur in einer kleinen Umgebung eines Punktes im  $Q$ -Raum von Null verschieden ist und sich mit der Geschwindigkeit der Atome in der Strahlrichtung fortpflanzt. Die Wahrscheinlichkeit einer relativen Amplitude  $q$  für irgendwelche Werte  $Q$  ist gegeben durch das Integral von

$$S(Q, q, t) S(Q, q, t) \text{ über } Q, \text{ d. h. durch (20).}$$

Die Eigenfunktion (21) wird sich aber im Magnetfeld berechenbar verändern und sich wegen der verschiedenen Ablenkung der Atome im oberen und unteren Zustand hinter dem Magnetfeld verwandelt haben in

$$S(Q, q, t) = c_2 S_2(Q, t) \psi_2(E_2, q) e^{\frac{2\pi i (E_2 t + \beta)}{h}} + \sqrt{1 - c_2^2} S_1(Q, t) \psi_1(E_1, q) e^{\frac{2\pi i E_1 t}{h}}. \quad (22)$$

$S_1(Q, t)$  und  $S_2(Q, t)$  werden Funktionen des  $Q$ -Raumes sein, die nur in einer kleinen Umgebung eines Punktes von Null verschieden sind; aber dieser Punkt ist für  $S_1$  ein anderer, als für  $S_2$ .  $S_1 S_2$  ist also überall Null. Die Wahrscheinlichkeit einer relativen Amplitude  $q$  und eines bestimmten Wertes  $Q$  ist daher

$$S(Q, q, t) \bar{S}(Q, q, t) = c_2^2 S_2 \bar{S}_2 \psi_2 \bar{\psi}_2 + (1 - c_2^2) S_1 \bar{S}_1 \psi_1 \bar{\psi}_1. \quad (23)$$

Das periodische Glied aus (20) ist verschwunden, und damit die Möglichkeit, eine Phasenbeziehung zu messen. Das Resultat der statistischen Ortsbestimmung wird immer dasselbe sein, gleichgültig, bei welcher Phase des einfallenden Lichtes sie vorgenommen werde. Wir dürfen annehmen, daß Experimente mit Strahlung, deren Theorie ja noch nicht durchgeführt ist, die gleichen Resultate über die Phasenbeziehungen der Atome zum einfallenden Licht ergeben werden.

Zum Schluß sei noch der Zusammenhang der Gleichung (2)  $E_1 t_1 \sim h$  mit einem Problemkomplex studiert, den Ehrenfest und andere Forscher<sup>1)</sup> an Hand des Bohrschen Korrespondenzprinzips in zwei wichtigen Arbeiten diskutiert haben<sup>2)</sup>. Ehrenfest und Tolman sprechen von „schwacher Quantisierung“, wenn eine gequantelte periodische Bewegung durch Quantensprünge oder andere Störungen unter-

<sup>1)</sup> P. Ehrenfest und G. Breit, ZS. f. Phys. **9**, 207, 1922; und P. Ehrenfest und R. C. Tolman, Phys. Rev. **24**, 287, 1924; siehe auch die Diskussion bei N. Bohr, Grundpostulate der Quantentheorie I. c.

<sup>2)</sup> Auf diesen Zusammenhang hat mich Herr W. Pauli hingewiesen.

brochen wird in Zeitintervallen, die nicht als sehr lange im Verhältnis zur Periode des Systems angesehen werden können. Es sollen in diesem Falle nicht nur die exakten quantenmäßigen Energiewerte vorkommen, sondern mit einer geringeren qualitativ angebbaren a priori-Wahrscheinlichkeit auch Energiewerte, die nicht allzu weit von den quantenmäßigen Werten abweichen. In der Quantenmechanik ist dieses Verhalten so zu deuten: Da die Energie durch die äußeren Störungen oder die Quantensprünge wirklich verändert wird, so muß jede Energiemessung, sofern sie eindeutig sein soll, sich in einer Zeit zwischen zwei Störungen abspielen. Dadurch ist eine obere Grenze für  $t_1$  im Sinne von § 1 gegeben. Den Energiewert  $E_0$  eines gequantelten Zustandes messen wir also auch nur mit einer Genauigkeit  $E_1 \sim \frac{h}{t_1}$ . Dabei hat die Frage, ob das System solche Energiewerte  $E$ , die von  $E_0$  abweichen, „wirklich“ mit dem entsprechend kleineren statistischen Gewicht annehme, oder ob ihre experimentelle Feststellung nur an der Ungenauigkeit der Messung liege, prinzipiell keinen Sinn. Ist  $t_1$  kleiner als die Periode des Systems, so hat es keinen Sinn mehr, von diskreten stationären Zuständen oder diskreten Energiewerten zu sprechen.

Ehrenfest und Breit (l. c.) machen in ähnlichem Zusammenhang auf das folgende Paradoxon aufmerksam: Ein Rotator, den wir uns etwa als Zahnrad denken wollen, sei mit einer Vorrichtung versehen, die nach  $f$  Umdrehungen des Rades die Drehrichtung gerade umkehrt. Das Zahnrad greife etwa in eine Zahnstange ein, die ihrerseits zwischen zwei Klötzen linear verschiebbar ist; die Klötze zwingen nach einer bestimmten Anzahl Drehungen die Stange und damit das Rad zur Umkehr. Die wahre Periode  $T$  des Systems ist lang im Verhältnis zur Umlaufzeit  $t$  des Rades; die diskreten Energiestufen liegen entsprechend dicht, und zwar um so dichter, je größer  $T$  ist. Da vom Standpunkt der konsequenten Quantentheorie aus alle stationären Zustände gleiches statistisches Gewicht haben, werden für hinreichend großes  $T$  praktisch alle Energiewerte mit gleicher Häufigkeit vorkommen — im Gegensatz zu dem, was für den Rotator zu erwarten wäre. Dieses Paradoxon wird durch Betrachtung von unseren Gesichtspunkten aus zunächst noch verschärft. Um nämlich festzustellen, ob das System die zum reinen Rotator gehörigen diskreten Energiewerte allein oder besonders häufig annehmen wird, oder ob es mit gleicher Wahrscheinlichkeit alle möglichen Werte (d. h. Werte, die den kleinen Energiestufen  $\frac{h}{T}$  entsprechen) an-

nimmt, genügt eine Zeit  $t_1$ , die klein im Verhältnis zu  $T$  (aber  $\gg t$ ) ist; d. h. obwohl die große Periode für solche Messungen gar nicht in Wirksamkeit tritt, äußert sie sich scheinbar darin, daß alle möglichen Energiewerte auftreten können. Wir sind der Ansicht, daß solche Experimente zur Bestimmung der Gesamtenergie des Systems auch wirklich alle möglichen Energiewerte gleichwahrscheinlich liefern würden; und zwar ist an diesem Ergebnis nicht die große Periode  $T$ , sondern die linear verschiebbare Stange schuld. Selbst wenn sich das System einmal in einem Zustand befindet, dessen Energie der Rotatorquantelung entspricht, so kann es durch äußere Kräfte, die an der Stange angreifen, leicht in solche übergeführt werden, die der Rotatorquantelung nicht entsprechen<sup>1)</sup>. Das gekoppelte System: Rotator und Stange, zeigt eben ganz andere Periodizitätseigenschaften als der Rotator. Die Lösung des Paradoxons liegt vielmehr im folgenden: Wenn wir die Energie des Rotators allein messen wollen, müssen wir erst die Kopplung zwischen Rotator und Stange lösen. In der klassischen Theorie könnte bei hinreichend kleiner Masse der Stange die Lösung der Kopplung ohne Energieänderung geschehen, deshalb könnte dort die Energie des Gesamtsystems der des Rotators (bei kleiner Masse der Stange) gleichgesetzt werden. In der Quantenmechanik ist die Wechselwirkungsenergie zwischen Stange und Rad mindestens von der gleichen Größenordnung, wie eine Energiestufe des Rotators (auch bei kleiner Masse der Stange bleibt für die elastische Wechselwirkung zwischen Rad und Stange eine hohe Nullpunktsenergie!); bei Lösung der Kopplung stellen sich für Stange und Rad einzeln ihre quantenmäßigen Energiewerte her. Sofern wir also die Energiewerte des Rotators allein messen können, finden wir stets mit der durch das Experiment gegebenen Genauigkeit die quantenmäßigen Energiewerte. Auch bei verschwindender Masse der Stange ist aber die Energie des gekoppelten Systems von der Energie des Rotators verschieden; die Energie des gekoppelten Systems kann alle möglichen (durch die  $T$ -Quantelung zugelassenen) Werte gleichwahrscheinlich annehmen.

---

Die quantentheoretische Kinematik und Mechanik ist von der gewöhnlichen weitgehend verschieden. Die Anwendbarkeit der klassischen kinematischen und mechanischen Begriffe kann aber weder aus unseren Denkgesetzen noch aus der Erfahrung gefolgert werden; zu diesem Schluß

---

<sup>1)</sup> Dies kann nach Ehrenfest und Breit nicht oder nur sehr selten geschehen durch Kräfte, die am Rad angreifen.



gibt uns die Relation (1)  $p_1 q_1 \sim h$  das Recht. Da Impuls, Ort, Energie usw. eines Elektrons exakt definierte Begriffe sind, braucht man sich nicht daran zu stoßen, daß die fundamentale Gleichung (1) nur eine qualitative Aussage enthält. Da wir uns ferner die experimentellen Konsequenzen der Theorie in allen einfachen Fällen qualitativ denken können, wird man die Quantenmechanik nicht mehr als unanschaulich und abstrakt<sup>1)</sup> ansehen müssen. Freilich möchte man, wenn man dies zugibt, auch die quantitativen Gesetze der Quantenmechanik direkt aus den anschaulichen Grundlagen, d. h. im wesentlichen der Relation (1) ableiten können. Jordan hat deswegen versucht, die Gleichung

$$S(q q'') = \int S(q q') S(q' q'') dq'$$

als Wahrscheinlichkeitsrelation zu deuten. Dieser Deutung können wir uns aber nicht anschließen (§ 2). Vielmehr glauben wir, daß die quantitativen Gesetze aus den anschaulichen Grundlagen heraus einstweilen nur nach dem Prinzip der größtmöglichen Einfachheit verstanden werden können. Wenn z. B. die X-Koordinate des Elektrons keine „Zahl“ mehr ist, wie nach Gleichung (1) experimentell geschlossen werden kann, dann ist es die denkbar einfachste Annahme [die nicht mit (1) im Widerspruch steht], daß diese X-Koordinate ein Diagonalglied einer Matrix sei, deren Nichtdiagonalglieder sich in einer Ungenauigkeit bzw. bei Transformationen in anderen Weisen (vgl. z. B. § 4) äußern. Die Aussage, daß etwa die Geschwindigkeit in der X-Richtung „in Wirklichkeit“ keine Zahl, sondern Diagonalglied einer Matrix sei, ist vielleicht nicht abstrakter und unanschaulicher, als die Feststellung, daß die elektrische Feldstärke „in Wirklichkeit“ der Zeitanteil eines antisymmetrischen Tensors der Raumzeitwelt sei. Das Wort „in Wirklichkeit“ wird hier ebenso sehr und ebenso wenig berechtigt sein, wie bei irgend einer mathematischen Beschreibung natürlicher Vorgänge. Sobald man zugibt, daß alle quantentheoretischen Größen „in Wirklichkeit“ Matrizen seien, folgen die quantitativen Gesetze ohne Schwierigkeiten.

<sup>1)</sup> Schrödinger bezeichnet die Quantenmechanik als formale Theorie von abschreckender, ja abstoßender Unanschaulichkeit und Abstraktheit. Sicher wird man den Wert der mathematischen (und insofern anschaulichen) Durchdringung der quantenmechanischen Gesetze, die Schrödingers Theorie geleistet hat, nicht hoch genug einschätzen können. In den prinzipiellen, physikalischen Fragen hat aber meines Erachtens die populäre Anschaulichkeit der Wellenmechanik vom geraden Wege abgeführt, der durch die Arbeiten Einsteins und de Broglies einerseits, durch die Arbeiten Bohrs und die Quantenmechanik andererseits vorgezeichnet war.

Wenn man annimmt, daß die hier versuchte Deutung der Quantenmechanik schon in wesentlichen Punkten richtig ist, so mag es erlaubt sein, in wenigen Worten auf ihre prinzipiellen Konsequenzen einzugehen. Daß die Quantentheorie im Gegensatz zur klassischen eine wesentlich statistische Theorie sei in dem Sinne, daß aus exakt gegebenen Daten nur statistische Schlüsse gezogen werden könnten, haben wir nicht angenommen. Gegen solche Annahmen sprechen ja z. B. auch die bekannten Experimente von Geiger und Bothe. Vielmehr gelten in allen Fällen, in denen in der klassischen Theorie Relationen bestehen zwischen Größen, die wirklich alle exakt meßbar sind, die entsprechenden exakten Relationen auch in der Quantentheorie (Impuls- und Energiesatz). Aber an der scharfen Formulierung des Kausalgesetzes: „Wenn wir die Gegenwart genau kennen, können wir die Zukunft berechnen“, ist nicht der Nachsatz, sondern die Voraussetzung falsch. Wir können die Gegenwart in allen Bestimmungsstücken prinzipiell nicht kennenlernen. Deshalb ist alles Wahrnehmen eine Auswahl aus einer Fülle von Möglichkeiten und eine Beschränkung des zukünftig Möglichen. Da nun der statistische Charakter der Quantentheorie so eng an die Ungenauigkeit aller Wahrnehmung geknüpft ist, könnte man zu der Vermutung verleitet werden, daß sich hinter der wahrgenommenen statistischen Welt noch eine „wirkliche“ Welt verberge, in der das Kausalgesetz gilt. Aber solche Spekulationen scheinen uns, das betonen wir ausdrücklich, unfruchtbar und sinnlos. Die Physik soll nur den Zusammenhang der Wahrnehmungen formal beschreiben. Vielmehr kann man den wahren Sachverhalt viel besser so charakterisieren: Weil alle Experimente den Gesetzen der Quantenmechanik und damit der Gleichung (1) unterworfen sind, so wird durch die Quantenmechanik die Ungültigkeit des Kausalgesetzes definitiv festgestellt.

Nachtrag bei der Korrektur. Nach Abschluß der vorliegenden Arbeit haben neuere Untersuchungen von Bohr zu Gesichtspunkten geführt, die eine wesentliche Vertiefung und Verfeinerung der in dieser Arbeit versuchten Analyse der quantenmechanischen Zusammenhänge zulassen. In diesem Zusammenhang hat mich Bohr darauf aufmerksam gemacht, daß ich in einigen Diskussionen dieser Arbeit wesentliche Punkte übersehen hatte. Vor allem beruht die Unsicherheit in der Beobachtung nicht ausschließlich auf dem Vorkommen von Diskontinuitäten, sondern hängt direkt zusammen mit der Forderung, den verschiedenen Erfahrungen gleichzeitig gerecht zu werden, die in der Korpuskulartheorie einerseits,

der Wellentheorie andererseits zum Ausdruck kommen. Z. B. ist bei Benutzung eines gedachten  $\Gamma$ -Strahlmikroskops die notwendige Divergenz des Strahlenbündels in Betracht zu ziehen; diese erst hat zur Folge, daß bei der Beobachtung des Elektronenortes die Richtung des Comptonrückstoßes nur mit einer Ungenauigkeit bekannt ist, die dann zur Relation (1) führt. Ferner ist nicht genügend betont, daß die einfache Theorie des Comptoneffekts in Strenge nur auf freie Elektronen anwendbar ist. Die daraus folgende Vorsicht bei Anwendung der Unsicherheitsrelation ist, wie Prof. Bohr klargestellt hat, unter anderem wesentlich für eine allseitige Diskussion des Übergangs von Mikro- zu Makromechanik. Schließlich sind die Betrachtungen über die Resonanzfluoreszenz nicht ganz korrekt, weil der Zusammenhang zwischen der Phase des Lichtes und der der Elektronenbewegung nicht so einfach ist, wie angenommen. Dafür, daß ich die genannten neueren Untersuchungen Bohrs, die in einer Arbeit über den begrifflichen Aufbau der Quantentheorie bald erscheinen werden, im Entstehen kennenlernen und diskutieren durfte, bin ich Herrn Prof. Bohr zu herzlichem Danke verpflichtet.

Kopenhagen, Institut für theoret. Physik der Universität.